Relaciones de Equivalencia

Esta relación que definimos es:

* Reflexiva: (∀x) (x ∈ S → (x, x) ∈ ρ)
* Simétrica: (∀x) (∀y) (x ∈ S ∧ y ∈ S ∧ (x, y) ∈ ρ → (y, x) ∈ ρ)
* Transitiva: (∀x) (∀y) (∀z) (x ∈ S ∧ y ∈ S ∧ z ∈ S ∧ (x, y) ∈ ρ ∧ (y, z) ∈ ρ → (x, z) ∈ ρ)

Algunos ejemplos de Relaciones de Equivalencia:

* La relación ρ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}, sobre {1, 2, 3}.
* La relación x ρ y ↔ x = y, sobre cualquier conjunto S.
* La relación x ρ y ↔ x ocupa la misma fila que y, sobre el conjunto {x: x es un estudiante de esta clase}.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Particiones de un Conjunto

Dada una relación de equivalencia ρ sobre un conjunto S y un x ∈ S, entonces mediante [x] se denota al conjunto de todos los miembros de S relacionados con x y es llamada clase de equivalencia de x. Es decir: [x] = {y: y ∈ S ∧ x ρ y}

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Clases de Equivalencia - Conjunto Cociente

* Una clase de equivalencia puede tomar su nombre a partir de cualquiera de sus miembros.
* Una clase de equivalencia puede tener más de un nombre o representante.

El conjunto cociente se denota: A/∼

Sea S = {a, b, c} un conjunto. Para una relación ρ = {(a, a),(b, b),(c, c),(a, c),(c, a)}, tenemos que

[a] = {a, c} = [c] ¿Cómo es el conjunto cociente? S/ρ = {[a] , [b]}

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Congruencia Módulo n

Para cualquier par de enteros ‘x’ e ‘y’ y entero positivo ‘n’, x ≡n y si x − y es un múltiplo entero de n.

Esta relación binaria es siempre una relación de equivalencia.

**Ejemplo**

Definamos una relación binaria de congruencia módulo 4 sobre el conjunto Z como:

x es congruente módulo 4 con y, denotado x ≡4 y, si x − y es un múltiplo entero de 4 o si ambos, x e y, dan el mismo resto si los dividimos por 4.

La congruencia módulo 4 es una relación de equivalencia sobre Z. Para determinar las clases de equivalencia, notemos que [0], por ejemplo, contendrá a los enteros desde 0 y cada múltiplo de 4, como 4, 8, 12, etc.

El conjunto cociente es Z/ ≡4= {[0] , [1] , [2] , [3]}:

[0] = {. . . , −8, −4, 0, 4, 8, . . .}

[1] = {. . . , −7, −3, 1, 5, 9, . . .}

[2] = {. . . , −6, −2, 2, 6, 10, . . .}

[3] = {. . . , −5, −1, 3, 7, 11, . . .}